KVANTITATIVNE METODE U GRAĐEVINSKOM MENADŽMENTU

predavanja 2017/18

1. UVOD

2. VJEROVATNOĆA I SLUČAJNI DOGAĐAJI

P1

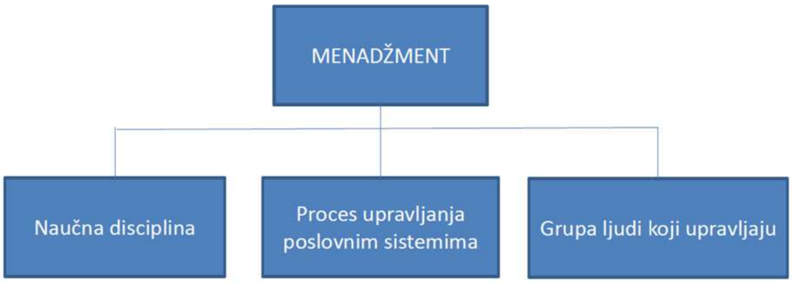
KVANTITATIVNE METODE U GRAĐEVINSKOM MENADŽMENTU
predavanja 2017/18

1. **UVOD**
   Menadžment
   Odlučivanje i metode menadžmenta

P1.1

Menadžment

- Trostruko poimanje menadžmenta:
  - proces upravljanja poslovima, poduhvatima ili poslovnim sistemima
  - posebna grupa ljudi
  - naučna disciplina



Definicije menadžmenta

- Menadžment predstavlja proces predviđanja, organizovanja, komandovanja, koordinacije i kontrole (H. Fayol)
- Menadžment su koordinirane aktivnosti za vođenje organizacije (ISO 9000:2001-Sistemi menadžmenta kvalitetom, Osnove i rečnik)
- Menadžment je proces planiranja, organizovanja, vođenja, koordinacije i kontrolisanja resursa radi ostvarivanja organizacionih ciljeva pod najpovoljnijim uslovima
- Menadžment je naučna disciplina usmjerena na iznalaženje mjera i akcija kojima se poboljšava realizacija različitih aktivnosti i poduhvata u cilju efikasnijeg funkcionisanja i razvoja različitih privrednih i društvenih sistema (opšta definicija menadžmenta)

Funkcije menadžmenta

- Različiti autori definišu različite funkcije menadžmenta:
  - **planiranje** -sistematsko razmišljanje o željenoj budućnosti i djelovanju u sadašnjosti na njenom ostvarivanju
  - **organizovanje** (organizovanje i kadriranje....) -usklađivanje ljudskih i materijalnih resursa, dodjeljivanje zadataka i odgovornosti (konkretnim pojedincima), izbor odgovarajuće organizacione strukture u svrhu ostvarivanja pretpostavljenih planova
  - **rukovođenje/liderstvo** (vođenje i motivisanje,...) –usmjeravanje, podsticanje i vođenje aktivnosti članova organizacije kako bi uložili maksimalne napore za realizaciju ciljeva organizacije
  - **kontrola** (koordinacija i kontrola) – poređenje ostvarenog sa planiranim

Funkcije menadžmenta

Izvor: Stoner J et al(2000), Menadzment, Zelind, Beograd

Značaj menadžmenta

- Značaj menadžmenta može se sagledati kroz doprinos organizaciji tako da ona bude :
  - **EFEKTIVNA** organizacije (raditi prave stvari, odnosno izabrati prave ciljeve i nastojati da se oni u potpunosti realiziju)
    - efektivna organizacija ima bolju poziciju na tržištu, veću protifabilnost...
  - **EFIKASNA** organizacije (raditi na pravi način uz najmanje korišćenje raspoloživih resursa, odnosno uz najviši nivo racionalnosti njihove upotrebe)
    - ekonomska efikasnost=ekonomičnost= odnos troškova i ostvarenih vrijednosti
    - tehnološka efikasnost obuhvata produktivnost i racionalnost – količina proizvoda po jedinici upotrebljenog faktora (živog rada ili energije)
- Neophodni uslovi za povećanje efektivnosti i efikasnosti menadžmenta – primjena adekvatnih metoda odlučivanja

Menadžment i odlučivanje

- Proces donošenja odluka* obuhvata sljedeće korake (1):
  1. Struktuiranje problema:
     - Definisanje problema
     - Identifikaciju alternativa
     - Određivanje kriterijuma za izbor alternativa
  2. Analizu problema
     - Procjenu alternativa
     - Izbor alternative
- Donošenje odluka treba biti zasnovano na :
  – kvalitativnim metodama- zasniva se uglavnom na iskustvu menadžera i njegovoj intuiciji; primjenjiva za jednostavne probleme i menadžere sa iskustvom
  – kvantitativnim metodama –zasniva se na kvantitativnim i semi-kvantitativnim podacima i matematičkim izrazima koji opisuju ciljeve, ograničenja i druge odnose , kao i na korišćenju različitih matematičkih metoda kako bi se smanjio rizik u odlučivanju, odnosno postigli željeni rezultati sa velikim stepenom izvjesnosti.

**odluke kao što su:*
- *struktura i obim proizvodnog programa*
- *angažovanje i alokacija resursa (radnika, materijalnih i finansijskih resursa)*
- *uvođenje novih tehnnologija*

(1) David R. Anderson, Dennis J. Sweeney & all ***Quantitative Methods for Business***

Za istraživanje i izučavanje ekonomskih pojava, modelovanje ima poseban značaj, zbog nemogućnosti primjene klasičnih metoda eksperimentisanja.
Značajna je mogućnost primene matematičkih modela i kvantitativnih (matematičko-statističkih) metoda u procesu odlučivanja, naročito u fazama
pripreme odluke.
„Smisao uvođenja matematike u proces pripreme i donošenja odluke je da se, korišćenjem, relevantnih informacija i uvažavanjem postojanja i stalnog menjanja faktora koji deluju na posmatrani sistem (učestvuju u posmatranom procesu), smanji rizik u odlučivanju do te mere da se, odabirom najpovoljnije alternative, mogu očekivati željeni rezultati sa velikim stepenom izvesnosti.“

Metode menadžmenta

- Metodologija (grč. methodos – put, traženje) = sistem pravila na osnovu kojih se realizuju postupci (istraživački mendažerski....), izgrađuju teorije i obavlja njihova provjera
- kvalitativne metode se uglavnom primjenjuju za prvi korak u rješavanju problema, odnosno za definisanje problema (Išikava dijagram uzroka i posljedica, QFD- metoda razvoja funkcija kvaliteta, Brainstorming, Benčmarking (Benchmarking), SWOT....)
- kvantitativne metode se primjenjuju za :
  - prikupljane i obradu kvantitativnih podataka o istraživanom problemu,
  - testiranje odgovarajućih hipoteza (pretpostavki)
  - formulisanje zakonitosti
- razlozi usporene primjene matematičkih metoda u društvenim naukama (i menadžmentu):
  - pojave i odnosi u privredi su kompleksni pa ne mogu biti opisani jednostavnim matematičkim formulama
  - teorijska matematika je razvila odlične metode za proučavanje prirodnih pojava, ali te metode nisu dovoljne za proučavanje društvenih pojava

Kvantitativne metode

- kvantitativne metode se zasnivaju na primijenjenoj matematici
- **Primijenjena matematika** je grana matematike koja se bavi matematičkim tehnikama koje se koriste u primjenama matematičkog znanja na druge oblasti (prirodne nauke, inženjerstvo, a kasnije i u oblasti društvenih nauka: ekonomije ,menadžmenta...).
- Oblasti primijenjene matematike koje se koriste u menadžmentu
  - teorija vjerovatnoće,
  - statistika,
  - operaciona istraživanja,
  - teorija igara....
- U okviru ovog predmeta bavićemo se:
  - teorijom vjerovatnoće,
  - statistikom,
  - nekim metodama operacionih istraživanja.

Na početku II svj. rata osnivani su multidisciplinarni timovi eksperata iz oblasti prirodnih nauka za rješavanje problema u upravljanju primjenom matematičkih modela: operaciona istraživanja.
Ova istraživanja služe za rješavanje problema proizvodnih programa, kontrola neizvjesnih poduhvata, upravljanja zalihama, optimizaciju transporta i dr.

KVANTITATIVNE METODE U GRAĐEVINSKOM MENADŽMENTU

predavanja 2017/18

TEORIJA VJEROVATNOĆE I SLUČAJNI DOGAĐAJI

1. **Razvoj teorije**
2. **Eksperiment i slučajni događaj**
3. **Definicije vjerovatnoće slučajnog događaja**

P1.2

Razvoj teorije vjerovatnoće

Teorija vjerovatnoće je matematička disciplina koja proučava zakonitosti slučajnih događaja (pojava)

1. <u>rađanje teorije</u>: sredina XVII do početka XVIII vijeka:
   - Blaise Paskal (1623-1662) i Pierre de Fermat (1601-1665) –prepiska francuskih matematičara oko zadataka u vezi igara sa kockom (1)
   - Christiaan Huygens (1629-1695) NL –knjiga „O računu u hazardnim igrama"-uveo pojam matematičkog očekivanja
2. <u>formiranje teorije</u>: početak XVIII- sredina XIX vijeka
   - Jacob Bernoulli (1654 —1705) CH, knjiga „Umetnost pogađanja " u kojoj prvi daje dokaze za Prvu graničnu teoremu (Zakon velikih brojeva) -Bernulijeva teorema – *vjerovatnoća većih odstupanja frekvencije m/n od vjerovatnoće p je mala ako je n dovoljno veliko (2)*
   - Abraham de Moivre (*Muavr*)(1667-1754)FR- rad "Učenje o slučajevima" u kojem razmatra niz pitanja koja su vezana za Bernulijevu teoremu i skoro formuliše normalnu raspodjelu
   - Pjer Laplas (1749 -1827) FR-proširio je Muavrovu teoremu u Muavr-Laplasovu teoremu, odnosno drugu graničnu teoremu. U knjizi "Analitička teorija verovatnoća" formuliše i danas važeću klasičnu definiciju vjerovatnoće
   - Karl Gaus (1777-1855) D- daje normalni zakon raspodjele slučajnih grešaka, zatim ocjenu parametara normalne raspodele, metod najmanjih kvadrata i sl.
   - drugi matematičari: T. Bajes (1702-1763), L. Ojler (1707-1788), Puason (1781-1840) i mnogi drugi.

izvor (1) Franka Miriam Bruckler: Pierre de Fermat; Osječki matematički list 5(2005), 37–42:

„U to doba komunicirao je s Blaiseom Pascalom te su zajedno postavili osnove teorije vjerojatnosti. Najpoznatiji je zadatak na kojem su postavljeni ti principi sljedeći: dva igrača igraju neku igru u kojoj pobjednik u svakom krugu dobiva 1 bod (nema neodlučenih ishoda), a ugovoren je broj bodova tako da onaj koji ga prvi ostvari dobiva sav ulog. U nekom trenutku prvom igraču nedostaju 2 boda do pobjede, a drugom nedostaju 3 boda. Ako bi se igra morala prekinuti u tom trenutku, kako treba rasporediti ulog medu igračima?
Kao prvo, zamislimo da se igra mogla nastaviti. Tada je jasno da bismo nakon najviše 4 kruga imali pobjednika. Ispišemo li sve kombinacije koje se mogu dogoditi u ta 4 kruga (**a** neka označava pobjedu prvog, a **b** pobjedu drugog igrača) imamo 16 mogućih kombinacija:
aaaa, aaab, aaba, aabb, abaa, abab, abba, abbb, baaa, baab, baba, babb, bbaa, bbab, bbba, bbbb.
Sve kombinacije s 2 ili više a-ova znače pobjedu prvog igrača, a one s 3 ili više b-ova znače pobjedu drugog. Vidimo da u 11 slučajeva pobjeđuje prvi, a u ostalih 5 pobjeđuje drugi igrač. Stoga ulog treba rasporediti u omjeru 11 : 5.
Uz ovaj zadatak, čiju metodu rješavanja točke u kojoj se taj minimum (maksimum) postiže je razvio Fermat, poznat je još samo jedan problem iz teorije vjerojatnosti kojeg je Fermat rješavao (a kojeg mu je isto poslao Pascal): ako se netko kladio baciti šesticu na kocki bar jednom u npr. osam bacanja, a u prva tri nije uspio, koji dio uloga bi trebao dobiti ako odustane od daljnih bacanja? Fermat argumentira ovako: budući je vjerojatnost uspjeha u svakom bacanju 1/ 6 = 0, 16666 ..., igrač bi smio u slučaju odustanka od bilo kojeg bacanja uzeti šestinu svog uloga natrag, no time nije uzeta u obzir trenutna situacija u igri. Ako dodjelu dijela uloga želimo napraviti na osnovi procjene rezultata četvrtog bacanja prije nego se ono izvrši, onda razmišljamo ovako: prvo bacanje vrijedi 1/ 6 uloga, drugo bacanje vrijedi 1/ 6 ostatka tj. 1/ 6 · 1 − 1/ 6 = 5 /36 od ukupnog uloga, treće bacanje opet vrijedi 1/ 6 ostatka tj. 1 /6 · 1 − 1/ 6 − 5 /36 = 25 /216 od ukupnog uloga. Na kraju, četvrto bacanje vrijedi 1 /6 ostatka nakon trećeg bacanja tj. 1/6 · 1 − 1/6 − 5/36 − 25/216 = 125/1296 od ukupnog uloga tj. igrač u slučaju odustanka nakon trećeg bacanja treba dobiti 125/ 1296 = 0, 09645 ... od ukupnog uloga."

<u>PROBLEM ZA RAZMIŠLJANJE</u>
Dva igrača A i B dogovore se da čitav ulog pripadne onom koji prvi dobije tri igre. Pošto je igrač A dobio 2 igre, a igrač B 1 igru, morali su da prekinu. Postavlja se pitanje, kako da podele ulog ? Paskal im je odgovorio da podele u razmeri 3:1. Obrazloženje?

(2) izvor: S. Vukadinović: Elementi teorije verovatnoće i matematičke statistike, Privredni pregled, Beograd, 1986.

Bufon je bacio novčić 4040 puta i 1992 puta je dobio grb.
Pirson je 12 000 puta bacio novčić i dobio 6019 puta grb, a kada ga je bacio 24 000 puta dobio je grb 12 012 puta.
Frekvencije pojave grba u ovim eksperimentima su 0,4931, 0,5016 i 0,5005, dakle vrlo bliske vjerovatnoći 50%, odnosno 0,5.

Razvoj teorije vjerovatnoće

3. dalji razvoj graničnih teorema: druga polovina XIX vijeka (ruski matematičari)
   - P. Čebišev (1821-1894)RU - nove ideje u teoriji vjerovatnoće u cilju dokazivanja zakona velikih brojeva i graničnih teorema, uspostavljajuci vezu između matematičkog očekivanja slučajne promenljive i aritmetičke sredine posmatrane slučajne promenjljive (1)
   - A. Markov (1856-1922)RU "lanci Markova", to jest nizovi slučajnih promenljivih povezanih tako da vjerovatnoća realizacije jednog eksperimenta uzima određenu vrijednost ako je poznat rezultat prethodnog eksperimenta
   - A. Ljapunov (1858-1918)RU- Definisao centralnu graničnu teoremu i odredio pod određenim uslovima kolika je razlika između matematičkog očekivanja i aritmetičke sredine slučajne promjenljive (2)
4. matematička disciplina sa jasno definisanim metodama: od XX vijeka
   - Andrej Nikolajevič Kolmogorov (1903-1987)RU- objavio aksiomatiku teorije vjerovatnoće što je omogućilo da se teorija vjerovatnoće ne oslanja samo na empirijske i intuitivne motive, već na formalno-logičku teoriju povezanu sa drugim matematičkim pojmovima. Ujedno je začetnik teorije slučajnih procesa.

(1) **izvor: S. Vukadinović: Elementi teorije verovatnoće i matematičke statistike, Privredni pregled, Beograd, 1986.**
za veliki broj ponavljanja eksperimenta ($n \to \infty$), aritmetička sredina uočenih vrijednosti slučajne promjenljive (X) konvergira u vjerovatnoći ka njenom matematičkom očekivanju (M(X)).

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots . + X_n}{n} - M(X)\right| < \varepsilon\right) = 1$$

(2)izvor: http://www.e-statistika.rs/index.php?pa=56&idTeksta=80

„Centralna granična teorema je specijalan slučaj binomne raspodele verovatnoća koju je prvi otkrio Abraham de Moivre oko 1730. godine. Ovaj rad je pao u zaborav sve do 1812. godine kada ga je oživeo Laplas, ali je pravi značaj teoreme konačno uvideo Ljapunov 1901. godine. Danas se ova teorema smatra jednim od kamena temeljaca savremene teorije verovatnoće.
Kao i zakon velikih brojeva, centralna granična teorema pokušava da objasni granično ponašanje varijanse slučajne promenljive kada se broj posmatranja približava beskonačnosti. Ona navodi uslove pod kojima distribucija aritmetičkih sredina dovoljno velikog broja nezavisnih slučajnih varijabli, svaka sa konačnom sredinom i varijansom, približno odgovara normalnoj distribuciji.
Drugim rečima, *pretpostavimo da su X_1, X_2, ..., X_n nezavisne slučajne promenljive koje imaju istu, ne nužno normalnu distribuciju. Tada važi pravilo da sa porastom n, distribucija suma i aritmetičkih sredina slučajnih promenljivih teži ka normalnoj distribuciji. Pri tome, distribucija slučajnih promenljivih X_1, X_2, ..., X_n ne mora da bude normalna.*
U mnogim slučajevima, centralna granična teorema važi već za izuzetno mali uzorak.
Uopšteno govoreći, veličine iz stvarnog sveta su balansirana suma mnogih neopaženih slučajnih događaja, koji se ispoljavaju kao greška u merenju. Centralna granična teorema daje delimično objašnjenje zašto toliko mnogo pojava podleže normalnoj distribuciji, time što dokazuje da su greške u merenju u ponovljenim eksperimentima slučajno raspoređene, odnosno da podležu normalnoj distribuciji.
Koncept po kojem suma velikog broja "malih" nezavisnih slučajnih događaja ima normalnu distribuciju našao je primenu u mnogim oblastima. U savremenoj elektronici, na primer, putem ovog koncepta objašnjava se elektronska buka, odnosno omogućava se izrada algoritama za uklanjanje buke iz podataka. Ista tehnika je u poslednje vreme našla primenu i u svetu finansija, gde se koristi za analizu kretanja cene akcija na berzi."

Matematičke discipline nastale iz teorije vjerovatnoće

- teorija masovnog opsluživanja,
- teorija informacija,
- teorija pouzdanosti tehničkih sistema,
- teorija zaliha

Eksperiment i slučajni događaj

- **Eksperiment (opit):**
  - potpuno precizirana operacija (radnja) koja se u nepromijenjenim zadatim uslovima može ponoviti proizvoljan broj puta
  - jasno navedeno šta se u eksperimentu posmatra, odnosno registruje kao njegov ishod
  - rezultat (ishod) se ne može unaprijed predvidjeti
- **Elementarni događaj** -ishod eksperimenta (najčešće se označava sa *Ei* – indeks može da označava neko svojstvo događaja)
- **Prostor (polje) elementarnih događaja** (1) Skup svih mogućih ishoda posmatranog opita, odnosno elementarnih događaja S={E1, E2, E3,.....En}.
- **Slučajni događaj A** je podskup skupa S (prostora elementarnih događaja) i sastoji se od svih elementarnih događaja koji imaju to svojstvo kojim se A definiše
- **Sigurni (izvjestan, pouzdan) događaj** je skup svih elementarnih događaja (koji se javljaju u nekom eksperimentu)
- **Nemoguć događaj** je onaj događaj koji se nikad ne realizuje i obilježavamo ga kao prazan skup Φ . ($\Phi \subset S$)

(1) Skup elementarnih događaja može biti: konačan, prebrojiv ili neprebrojiv

Eksperiment i slučajni događaj

- **Primjer 1**. Eksperiment je bacanje ispravne kockice za igru numerisane brojevima od 1 do 6 na ravnu podlogu. Posmatra se broj koji se dobije na gornjoj strani kockice.
  - Broj koji se dobije je elementarni događaj (ukupno ih ima 6 i to su E1, E2, E3, E4, E5, E6)
  - Prostor odnosno polje elementarnih događaja je skup S={E1,E2,E3,E4,E5,E6}
  - Označimo sa A događaj: „ Pao je broj 3 " . Događaj A je slučajni događaj.
  - Pouzdan događaj bio bi „Dobijeni broj je manji od 7"
  - Nemoguć događaj bio bi „Dobijen je broj 8"

- **Primjer 2.** Novčić se baca dok se dva puta uzastopce ne dobije ista strana. Opisati prostor elementarnih događaja. Da li je prebrojiv?

- **Primjer 3**. Eksperiment je rješavanje testa koji se sastoji od 3 pitanja sa po tri ponuđena odgovora (a,b,c) od kojih je samo po jedan odgovor tačan, a u svakom pitanju se mora zaokružiti samo po jedan odgovor. Posmatramo broj tacnih odgovora.
  - elementarni događaj je: ____________________
  - prostor, odnosno polje elementarnih događaja je ___________________
  - slučajni događaj bi mogao biti ______________________
  - pouzdan događaj je ____________________________
  - nemoguć događaj je ______________________________

Operacije i relacije sa slučajnim događajima – algebra događaja

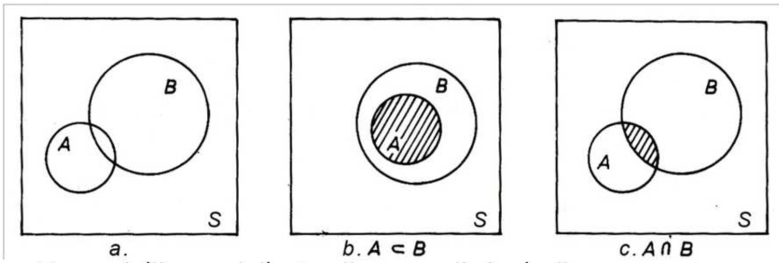
a) neka su A i B slučajni događaji u prostoru događaja S

b) Događaj A je **podskup** događaja B ako se u posmatranom eksperimentu realizacijom događaja A uvijek realizuje i događaj B (događaj A povlači -**implicira** događaj B)

- Ako za posmatrani opit važi da je događaj A podskup događaja B i da je događaj B podskup događaja A, kažemo da su događaji A i B **ekvivalentni** ili **jednaki** i pišemo A=B.

c) Ako se događaj C realizuje ukoliko se realizuju i događaj A i događaj B, tada se događaj C naziva **prejsek (proizvod)** događaja A i B, u oznaci C=A∩B (ili C=AB).

- Ako je A∩B= Φ , tj. događaji A i B se ne mogu ostvariti istovremeno, onda kažemo da su A i B **disjunktni (isključivi, nesaglasni)** događaji.



Veneovi dijagrami- ilustracija operacija i relacija

(c) Pojam presjeka može se proširiti i na bilo koji konačan skup događaja A1, A2, A3, ..., An (n>2). Događaj C, jednak presjeku događaja A1, A2, A3, ..., Ak , ostvaruje se kada se ostvare svi događaji Ak , 1 k n.

(d) I pojam unije se može proširiti na bilo koji konačan skup događaja A1, A2, A3, ..., An (n>2). Događaj C, jednak uniji događaja A1, A2, A3, ..., Ak , ostvaruje se ako se ostvari bar jedan od događaja Ak , 1 k n

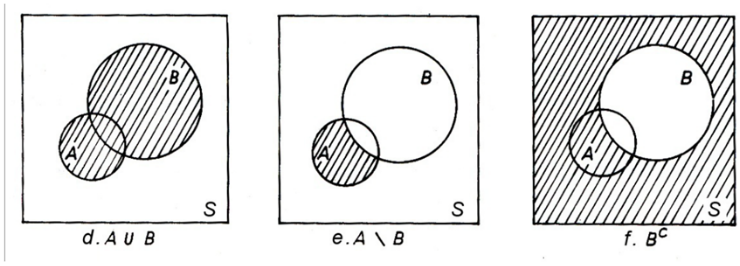
(1) A U A=A,	A ∩A=A
(2) A U B=B U A,	A∩ B=B∩A
(3) A U (B U C)=(A U B) U C,	A ∩ (B ∩ C)=(A ∩ B) ∩ C
(4) A U (B ∩ C)=(A U B) ∩ (A U C),	A ∩ (B U C)=(A ∩ B) U (A∩ C)
(5) A U Ā=S,	A ∩ Ā=Φ
(6) A U S=S,	A ∩ S=A

Operacije i relacije sa slučajnim događajima – algebra događaja

d) Ako se događaj C realizuje ukoliko se realizuje bar jedan od događaja A i B, tada se događaj C naziva **unija** događaja A i B. Ukoliko je A∩B= Φ , onda se za uniju događaja koristi i oznaka A+B.

e) Ako se događaj C realizuje ukoliko se realizuje događaj A i ne realizuje događaj B, tada se događaj C naziva **razlika** događaja A i B, u oznaci A \ B

f) Događaj Ā koji se realizuje ako i samo ako se događaj A ne realizuje naziva se **komplement** događaja A u odnosu na S. Događaji A i Ā su suprotni događaji.



Veneovi dijagrami- ilustracija operacija i relacija

Operacije i relacije sa slučajnim događajima – algebra događaja

- **Primjer 4.** Četiri studenta polažu ispit. Ako sa A, B, C i D redom označimo da su studenti polozili ispit izraziti sljedeće događaje:
  - položio je makar jedan student (to je unija događaja: polozio je prvi, položio je drugi, položio je treći i položio je četvrti student) A+B+C+D
  - položila su najviše dva studenta (to je unija događaja: nije položio niko, položio je jedan položila su dva studenta)
  - položila su najmanje tri studenta (to je unija događaja: položili su svi; prvi nije položio, a ostali jesu; drugi nije položio, a ostali jesu; treći nije položio, a ostali jesu; četvrti nije položio, a ostali jesu)
  - položili su svi studenti (presjek događaja polozio prvi, polozio drugi, položio treći, položio četvrti

Definicije vjerovatnoće slučajnog događaja

- **klasična definicija vjerovatnoće-** Laplas 1812. god.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

- **geometrijska vjerovatnoća:**

$$p = \frac{mjera\ g}{mjera\ G}$$

- **statistička definicija vjerovatnoće:**.

$$f_r(A) = \frac{m}{n}$$

- **aksiomatska definicija vjerovatnoće:** zasniva se na tri aksiome

Klasična definicija vjerovatnoće slučajnog događaja

- **klasična definicija vjerovatnoće-** Laplas 1812. god.
  - Ako događaji *E1, E2,...En* čine prostor elementarnih događaja koji se međusobno isključuju ($E1 \cap E2 = \Phi$), koji su jednako mogući, i ako realizacija *m* ($0 \leq m \leq n$) ovih elementarnih događaja povlači realizaciju događaja *A*, onda je vjerovatnoća *P(A)* događaja *A* jednaka**:**

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{m}{n}}$$

- Osobine klasične vjerovatnoće:
  - uvijek nenegativna vrednost, ne veća od 1: $1 \geq p(A) \geq 0$
  - ako je m=0, događaj je nemoguć, pa je $p(A)=0$
  - ako je m=n, onda je događaj A siguran, pa je $p(A)=1$
  - vjerovatnoća da se događaj A ne realizuje je suprotna vjerovatnoća

$$q(A) = 1 - p(A)$$

- Nedostaci klasične definicije:
  - neophodno je poznavanje **svih** mogućih elementarnih događaja i **svih** elementarnih događaja koji su povoljni za događaj A
  - ova dva skupa elementarnih događaja (svih i povoljnih za događaj A) moraju biti konačni

Proračun vjerovatnoće

- **Primjer 5.** Ako se kocka baci jednom naći vjerovatnoću;
  a) pojave parnog broja na kocki
  b) pojave broja koji je manji od 5
  Rješenje: (prema klasičnoj definiciji vjerovatnoće)
  a) n=6, jer je S={E1, E2, E3, E4, E5, E6}
     m=3, jer je A={E2, E4, E6},
     P(A)=3/6=1/2
  b) n=6, jer je S={E1, E2, E3, E4, E5, E6}
     m=4, jer je B={E1, E2, E3, E4},
     P(B)=4/6=2/3

Proračun vjerovatnoće

- **Primjer 6.** Fabrika u toku dana proizvede 1000 kom. nekog proizvoda, po smjenama: I smjena 400kom; II smjena 350kom; III smjena 250kom. Ako se jedan proizvod bira slučajnim putem, kolika je vjerovatnoća da je izabrani proizvod:
  a) proizveden u I smjeni
  b) da nije proizveden u III smjeni
  c) da je proizveden u I ili III smjeni

  Rješenje: (prema klasičnoj definiciji vjerovatnoće)

  a) n=1000, m=400, jer ih je toliko proizvedeno u prvoj smjeni,
     P(A1)=400/1000=2/5
  b) n=1000, m=1000-250=750, jer ih je toliko proizvedeno u svim smjenama osim u trecoj,
     P(A1UA2)=750/1000=3/4
     Sračunati rješenje na drugi način!
  c) n=1000, m=400+250=650, jer ih je toliko proizvedeno u prvoj i drugoj smjeni zajedno
     P(A1UA3)=650/1000=13/20
     Može li se rezultat dobiti i na drugi način?

Geometrijska vjerovatnoća slučajnog događaja

- **geometrijska vjerovatnoća:** proširenje klasične definicije na slučaj kada je skup elementarnih isključivih događaja beskonačan

$$p = \frac{mjera\ g}{mjera\ G}$$

  – gdje je:
    - p- vjerovatnoća da se izabere tačka u oblasti g
    - oblast G (linija, površ, prostor)
    - oblast g (duž, površina, tijelo) kao podskup tačaka oblasti G

Proračun vjerovatnoće

- **Primjer 7**. (geometrijska vjerovatnoća). Data je duž AB i tačke C i D koje pripadaju toj duži. Na slučajan način se bira jedna tačka duži AB. Kolika je vjerovatnoća da izabrana tačka pripada i duži CD?

<u>Rješenje.</u> Prema klasičnoj definiciji vjerovatnoće bilo bi:

P(A)=broj tačaka duži CD/broj tačaka duži AB,

ali pošto je i jednih i drugih beskonačno ova se definicija ne može primijeniti, nego se primjenjuje geometrijska vjerovatnoća:

P(A)=duzina(CD)/duzina (AB)

- **Primjer 8.** Kolika je vjerovatnoća da se prilikom slučajnog izbora jedne tačke iz kvadrata stranice *a* ta tačka nalazi i u krugu upisanom u taj kvadrat?

<u>Rješenje.</u> Skup S je skup tačaka kvadrata (površine a^2), a za događaj A to je skup tačaka kruga upisanog u kvadrat (njegova površina je $a^2\pi/4$). Geometrijske mjere su površine ovih skupova, pa je

$$P(A) = \frac{\frac{a^2\pi}{4}}{a^2} = \frac{\pi}{4}$$

Formula se može generalizovati i za proizvod n događaja.

Statistička definicija vjerovatnoće slučajnog događaja

- **<u>statistička definicija vjerovatnoće:</u>**.
  - Ako sa *m* označimo broj realizacija događaja *A* u *n* nezavisnih eksperimenata, onda je (relativna) frekvencija događaja *A*:

$$f_r(A) = \frac{m}{n}$$

  - što je *n* veće ova frekvencija *fr* teži konstantnoj vrijednosti koju uzimamo kao vjerovatnoću događaja *A*, što je definisano i Bernulijevom teoremom:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Aksiomatska definicija vjerovatnoće slučajnog događaja

- **aksiomatska definicija vjerovatnoće:** zasniva se na tri aksiome:
  1. **nenegativnost-** Svakom slučajnom događaju A iz polja S, odgovara nenegativan broj P(A) koji se naziva vjerovatnoća događaja A
  2. **normiranost** - Vjerovatnoća pouzdanog događaja jednaka je 1
  3. **aditivnost-** Ako se događaji A i B međusobno isključuju (njihov proizvod je prazan skup), onda je *P(A+B)=P(A)+P(B)*

Vjerovatnoća unije događaja

- **u slučaju isključivih događaja**: Ako su događaji A1, A2, ..., An takvi da su ma koja dva uzajamno isključiva, tj. AiAj = Φ, za i j, i,j=1,2,...,n, tada na osnovu aksiome 3 vjerovatnoća njihove unije (zbira) je jednaka zbiru vjerovatnoća tih događaja:

$$P(A1+A2+A3+...+An)=P(A1)+P(A2)+P(A3)+...+P(An)$$

- **u slučaju da događaji nijesu isključivi:** *Neka su A i B bilo koji događaji iz S takvi da je A∩ B≠Φ , tada je*

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)- P(AB).$$

za tri događaja je:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)- P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

Formula se može generalizovati i za proizvod n događaja.

Vjerovatnoća unije događaja

- **Primjer 13.** Odrediti vjerovatnoću da slučajno izabran dvocifreni broj bude djeljiv sa 5 ili 7.?

  Rješenje. Označimo sa A događaj da je broj djeljiv sa 5, sa B događaj da je broj djeljiv sa 7 i sa AB događaj da je broj djeljiv i sa 5 i sa 7. Ukupno ima 90 dvocifrenih brojeva, od kojih su 18 djeljivi sa 5, 13 djeljivi sa 7 i 2 broja djeljiva i sa 5 i sa 7 (brojevi 35 i 70), pa je P(A U B)=P(A)+P(B)- P(AB)=18/90+13/90-2/90=29/90

- **Primjer 14.** Iz špila od 52 karte slučajnim izborom se izvlači jedna karta . Kolika je vjerovatnoća da izvučena karta bude dama ili pik karta?

  Rješenje. označimo sa D1- izvučena karta je dama: P(D1)= 4/52=0.077. Označimo sa D2- izvučena karta je karta pik P(D2)= 13/52=0.250. Označimo sa D3-izvučena karta je dama pik P(D3)= P(D1D2)= 1/52 = 0.019

  P(D1U D2) = P(D1)+P(D2)-P(D1D2)= 0.077 + 0.250 – 0.019=0,308

- **navesti primjer isključivih događaja!**

Literatura

- Vukadinović, S.: Elementi teorije verovatnoće i matematičke statistike, Privredni pregled, Beograd, 1986
- Vukadinović, S.: Zbirka rešenih zadataka iz teorije verovatnoće, Privredni pergled, Beograd, 1983
- Bruckler, F.M: Pierre de Fermat; Osječki matematički list 5(2005), 37–42
- http://www.e-statistika.rs
- Čuljak, V: Vjerojatnost i statistika, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2011, https://portal.uniri.hr/system/resources/docs/000/004/082/original/Skripta_Vera_%C4%8Culjak.pdf?1413283708
- Tomič, V.: Elementi verovatnoće u srednjoj školi, (master rad), http://www.dmi.uns.ac.rs/site/dmi/download/master/matematika/VojinTomic.pdf